

Musterlösung 7

1. X hat eine Binomialverteilung der Länge $n = 2$ mit Erfolgsparemeter $p = 1/2$, also $X \sim \text{Bin}(2, 1/2)$. Das heisst

$$P[X = 0] = 1/4, \quad P[X = 1] = 1/2 \quad \text{und} \quad P[X = 2] = 1/4.$$

Y hat eine Bernoulliverteilung mit Erfolgsparemeter $p = 1/2$, also $Y \sim \text{Ber}(1/2)$. Oder anders ausgedrückt, Y hat eine Binomialverteilung der Länge $n = 1$ mit Erfolgsparemeter $p = 1/2$, also $Y \sim \text{Bin}(1, 1/2)$. Das heisst,

$$P[Y = 0] = 1/2 \quad \text{und} \quad P[Y = 1] = 1/2.$$

Die Zufallsvariable $X + Y$ beschreibt die Anzahl geworfener „Köpfe“ in den drei Würfeln. Also ist $X + Y \sim \text{Bin}(3, 1/2)$. Die Verteilung von $Z := X - Y$ ist gegeben durch

$$P[Z = -1] = 1/8, \quad P[Z = 0] = 3/8, \quad P[Z = 1] = 3/8, \quad P[Z = 2] = 1/8.$$

Um diese Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, haben wir die Unabhängigkeit von X und Y benutzt. Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned} P[Z = 1] &= P[X = 1, Y = 0] + P[X = 2, Y = 1] \\ &= P[X = 1] \cdot P[Y = 0] + P[X = 2] \cdot P[Y = 1] = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Analog wurden die weiteren Wahrscheinlichkeiten berechnet.

2. a) Es ist für $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} P[X = j] &= \sum_{k \geq j} P[X = j, Y = k] = \sum_{k \geq j} P[X = j | Y = k] \cdot P[Y = k] \\ &= \sum_{k \geq j} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(k+j)!}{j!k!} p^j (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} (p\lambda)^j}{j!} \sum_{k \geq 0} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda} (p\lambda)^j}{j!} e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Also ist X poissonverteilt mit Parameter $p\lambda$. Ebenso ist $Y - X$ poissonverteilt mit Parameter $(1-p)\lambda$, denn für $j \geq 0$,

$$P[Y - X = j] = \sum_{k \geq j} P[X = k - j, Y = k] = e^{-(1-p)\lambda} \frac{((1-p)\lambda)^j}{j!},$$

Bitte wenden!

wobei die letzte Gleichung analog folgt.

BEMERKUNG: $Y - X$ beschreibt die Anzahl Defekte, die sich *nicht* im Teilgebiet befinden. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Defekt nicht im Teilgebiet befindet, ist $1 - p$.

b) Für $k, j \geq 0$ ist

$$\begin{aligned}
 P[Y - X = k, X = j] &= P[Y = k + j, X = j] = P[X = j \mid Y = k + j] \cdot P[Y = k + j] \\
 &= \binom{k+j}{j} p^j (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \\
 &= \frac{1}{j!k!} p^j (1-p)^k e^{-p\lambda} e^{-(1-p)\lambda} \lambda^k \lambda^j \\
 &= \left(e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^j}{j!} \right) \cdot \left(e^{-(1-p)\lambda} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} \right) \\
 &= P[X = j] \cdot P[Y - X = k].
 \end{aligned}$$

Folglich sind X und $Y - X$ unabhängig.

3. a) X ist binomialverteilt mit Parametern $n = 1024$ und $p = 10^{-3}$, d.h.

$$P[X = k] = \binom{1024}{k} 0.001^k 0.999^{1024-k} \quad \text{für } k = 0, \dots, 1024.$$

b) Da $n = 1024$ relativ gross und $p = 10^{-3}$ relativ klein ist, ist X approximativ poissonverteilt mit Parameter $\lambda = np = 1024 \cdot 0.001 = 1.024$, d.h.

$$P[X = k] \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Diese Näherung hat den Vorteil, dass sie sich, besonders für grosses k , leichter berechnen lässt als der exakte Wert. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Codewort richtig decodiert wird, ist somit

$$P[X \leq 3] = \sum_{k=0}^3 P[X = k] \approx e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} \right) = 0.97950487 \dots$$

c) Die Anzahl Y falsch decodierter Wörter ist (mit der in Aufgabe **b)** vorgenommenen Näherung) ungefähr Binomial(10, $1 - 0.9795$) verteilt. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$P[Y \geq 1] = 1 - P[Y = 0] \approx 1 - \binom{10}{0} 0.0205^0 0.9795^{10} = 0.187 \dots$$